ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGÔ THỊ LÝ

VỀ TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH HÓA CỦA HỆ PHÂN THỨ CAPUTO LỒI ĐA DIỆN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Mai Viết Thuận
TS. Li Chenglin

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Trong vòng ba thế kỷ, lý thuyết về đạo hàm phân thứ được phát triển chủ yếu như là một lĩnh vực lý thuyết thuần tuý của toán học và chỉ hữu ích cho các nhà toán học. Tuy nhiên, một vài thập kỷ gần đây, nhiều nhà khoa học đã chỉ ra rằng đạo hàm và tích phân cấp không nguyên rất phù hợp cho sự mô tả tính chất của các vật liệu thực khác nhau và nhiều mô hình kỹ thuật khác nhau. Ngoài ra, chúng còn được tìm thấy trong kỹ thuật vật liệu, hệ thống kinh tế, hệ thống nhớt, hệ thống tài chính, phân cực điện cực [9].

Do nhiều lý do như quá trình xấp xỉ tuyến tính, mô hình không chính xác, lỗi đo lường nên các yếu tố không chắc chắn thường xuất hiện trong các hệ động lực trong thực tế. Hệ phương trình vi phân và điều khiển lồi đa diện là một trong những lớp hệ động lực thuộc lớp này. Tính ổn định và ổn định hóa của một số lớp hệ phương trình vi phân lồi đa diện với bậc nguyên đã được nghiên cứu trong [17, 18, 19] bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lyapunov. Đối với lớp hệ phương trình vi phân phân thứ, đã có một số công trình quan trọng được công bố trên các tạp chí quốc tế có uy tín (xem [3, 5, 8, 10, 11, 12, 15]).

Luận văn tập trung trình bày một số kết quả về tính ổn định và ổn định hóa cho một lớp hệ phương trình vi phân phân thứ Caputo lồi đa diện dựa trên việc tổng hợp và trình bày một cách có hệ thống một số bài báo được xuất bản trong những năm gần đây trên các tạp chí quốc tế có uy tín. Luận văn gồm có 2 chương gồm những nội dung sau đây:

Trong Chương 1, chúng tôi trình bày một số khái niệm về giải tích phân thứ như tích phân và đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, tích phân và đạo hàm phân thứ Caputo. Sau đó, chúng tôi trình bày một số định lý tồn tại và duy nhất nghiệm. Cuối chương, chúng tôi trình bày một số bổ đề bổ trợ. Nội dung chính của chương này được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [20, 21, 22].

Trong Chương 2 của luận văn, chúng tôi trình bày một số điều kiện đủ cho tính ổn định và ổn định hóa của một lớp hệ tuyến tính phân thứ Caputo lồi đa diện có trễ. Nội dung của chương này được dự kiến viết bằng cách tham khảo các tài liệu [3, 10]. Ngoài ra, trong chương này chúng tôi cũng trình bày 03 ví dụ số để minh họa cho các kết quả lý thuyết.

Luận văn này được thực hiện tại trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của Tiến sĩ Mai Viết Thuận. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình. Người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn, tận tình dìu dắt và chỉ bảo tôi trong suốt quá trình thực hiện đề tài này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán – Tin cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tôi học tập và nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ sự cảm ơn tới các thầy cô trong Ban giám hiệu và anh, chị, em đồng nghiệp Trường THPT Chuyên Thái Nguyên đã luôn ủng hộ, tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình thân yêu đã chăm sóc động viên khích lệ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu. Sau cùng tôi xin kính chúc toàn thể quý thầy cô trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên thật dồi dào sức khỏe, niềm tin để tiếp tục thực hiện sứ mệnh cao đẹp của mình là truyền đạt tri thức cho thế hệ mai sau.

Xin chân thành cảm ơn.

Danh mục ký hiệu

$\mathbb{R}^n$	không gian vec tơ thực Euclide n chiều
$A^\top$	ma trận chuyển vị của ma trận A
I	ma trận đơn vị
$\lambda(A)$	tập hợp tất cả giá trị riêng của ma trận A
$\lambda_{\max}(A)$	$= \max\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\lambda_{\min}(A)$	$= \min\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\|A\|$	chuẩn phổ của ma trận A, $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$
$A \geq 0$	ma trận A nửa xác định dương, tức là $\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
$A \geq B$	nghĩa là $A - B \geq 0$
$A > 0$	ma trận A xác định dương, tức là $\langle Ax, x\rangle > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
$LMIs$	bất đẳng thức ma trận tuyến tính (Linear matrix inequalities)
$\|x\|$	chuẩn Euclide của véc tơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^{n\times r}$	không gian các ma trận thực cỡ $(n \times r)$
$C([a,b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục trên$[a, b]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
$AC^m[a,b]$	không gian các hàm tuyệt đối liên tục cấp m trên$[a, b]$
${}_{t_0}I_t^\alpha$	toán tử tích phân phân thứ Riemann - Liouville cấp α
${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Riemann - Liouville cấp α
${}_{t_0}^{C}D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Caputo cấp α
$\Gamma(x)$	hàm Gamma
$E_{\alpha,\beta}$	hàm Mittag-Leffler hai tham số
$\lceil\alpha\rceil$	số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về tính ổn định và ổn định hóa của các hệ phương trình vi phân thường và hệ phương trình vi phân có trễ. Chúng tôi cũng trình bày một số kết quả bổ trợ sẽ được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận văn cho các chương sau. Kiến thức sử dụng ở chương này được tham khảo ở [7, 20, 21, 22].

1.1. Giải tích phân thứ

1.1.1. Tích phân phân thứ

Trong mục này, chúng tôi trình bày sơ lược về khái niệm tích phân phân thứ. Khái niệm tích phân phân thứ là một mở rộng tự nhiên của khái niệm tích phân lặp thông thường.

Định nghĩa 1.1. ([22]) Cho $\alpha > 0$ và $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tích phân phân thứ Riemann-Liouville cấp α của hàm $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha} x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, \quad t \in (a, b], $$

trong đó $\Gamma(.)$ là hàm Gamma xác định bởi $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt, \alpha > 0$.

Trong Định nghĩa 1.1 khi $\alpha = 0$, chúng ta quy ước ${}_{t_0}I_t^{\alpha} := I$ với I là toán tử đồng nhất. Sự tồn tại của tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp α với $0 < \alpha < 1$ được cho bởi định lý sau

Định lý 1.1. ([22]) *Giả sử $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích trên $[a, b]$. Khi* *đó, tích phân* ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t)$ *tồn tại với hầu hết* $t \in [a,b]$. *Hơn nữa,* ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x$ *cũng là một hàm khả tích.*

Ví dụ sau đây cho ta tích phân phân thứ của một số hàm cơ bản.

Ví dụ 1.1. ([22])

(i) Cho $x(t) = (t-a)^{\beta}$, ở đây $\beta > -1$ và $t > a$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}, \quad t > a. $$

(ii) Cho $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda > 0$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \lambda^{-\alpha}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+j+1)}, \quad t > 0. $$

1.1.2. Đạo hàm phân thứ

Mục này trình bày một cách ngắn gọn về đạo hàm Riemann–Liouville và đạo hàm Caputo. Đây là hai loại đạo hàm được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực.

Định nghĩa 1.2. ([22]) Cho trước một số thực dương α và một khoảng $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α của hàm $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi

$$ {}^{RL}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t) := \frac{d^n}{dt^n}\left[{}_{t_0}I_t^{n-\alpha}x(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}x(s)ds, $$

trong đó $n := \lceil \alpha \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α và $\frac{d^n}{dt^n}$ là đạo hàm thông thường cấp n.

Ví dụ 1.2. Cho hàm bước đơn vị (unit-step function)

$$ f(t) = \begin{cases} 1, \text{nếu} & t \geq 0 \\ 0, \text{nếu} & t < 0. \end{cases} $$

Bằng cách sử dụng Định nghĩa 1.2, ta tính đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α của hàm $f(t)$ là

$$ {}^{RL}_{0}D_t^{\alpha}f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. $$

Trước khi trình bày điều kiện cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, chúng tôi nhắc lại một số kết quả sau.

Cho $[a,b]$ là một khoảng hữu hạn trong $\mathbb{R}$. $AC[a,b]$ là không gian các hàm tuyệt đối liên tục trên $[a,b]$. Kolmogorov và Fomin đã chỉ ra mối liên hệ giữa các hàm tuyệt đối liên tục và các hàm khả tích Lebesgue như sau:

$$f(t) \in AC[a,b] \Leftrightarrow f(t) = c + \int_a^t \varphi(s)ds \quad (\varphi(s) \in L(a,b)),$$

do đó một hàm tuyệt đối liên tục $f(t)$ có đạo hàm $f'(t) = \varphi(t)$ hầu khắp nơi trên $[a,b]$.

Với $n \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa lớp hàm $AC^n[a,b]$ như sau:

$$AC^n[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, (D^{n-1}f)(t) \in AC[a,b] \quad \left(D = \frac{d}{dt}\right)\}.$$

Mệnh đề sau đây cho ta một số đặc tính của lớp hàm $AC^n[a,b]$.

Mệnh đề 1.1. ([22]) *Không gian $AC^n[a,b]$ chứa tất cả các hàm $f(t)$ có dạng như sau:*

$$f(t) = {}_{t_0}I_t^\alpha \varphi(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (t-t_0)^k,$$

trong đó $\varphi(t) \in L(a,b), c_k (k = 0, 1, \ldots, n-1)$ là các hằng số tùy ý và

$${}_{t_0}I_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-1} \varphi(s) ds.$$

Ngoài ra, từ các điều kiện trên ta có

$$\varphi(s) = f^{(n)}(s), \quad c_k = \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Định lý sau đây cho ta một tiêu chuẩn cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville.

Định lý 1.2. ([22]) *Cho $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$. Nếu $f(t) \in AC^n[a,b]$, khi đó đạo hàm phân thứ ${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha f(t)$ tồn tại hầu khắp nơi trên $[a,b]$ và có thể được biểu diễn dưới dạng sau*

$${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-t_0)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(s)ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}.$$

Kết quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 1.2

Hệ quả 1.1. ([22]) *Nếu* $0 < \alpha < 1$ *và* $f(t) \in AC[a, b]$ *thì*

$$ {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(t_0)}{(t-t_0)^{\alpha}} + \int_{t_0}^{t} \frac{f'(s)ds}{(t-s)^{\alpha}} \right]. $$

Mệnh đề sau khẳng định toán tử đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville là một toán tử tuyến tính.

Mệnh đề 1.2. ([21]) *Cho trước một số thực dương* α*. Khi đó đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp* α *là một toán tử tuyến tính, tức là*

$$ {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda\, {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) + \mu\, {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} g(t) $$

trong đó $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f(t), g(t) \in AC^n[a, b]$.

Chứng minh. Ta có

$$ \begin{aligned} & {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} [\lambda f(t) + \mu g(t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} [\lambda f(s) + \mu g(s)]\, ds \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds + \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} g(s) ds \\ &= \lambda\, {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} f(t) + \mu\, {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} g(t). \end{aligned} $$

□

Định nghĩa 1.3. ([21]) Cho trước một số thực dương α và một khoảng $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Đạo hàm phân thứ Caputo cấp α của hàm $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) := {}_{t_0}I_t^{n-\alpha} D^n x(t), $$

trong đó $n := \lceil \alpha \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α và $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ là đạo hàm thông thường cấp n.

Đối với một hàm véc tơ $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_d(t))^T$ đạo hàm phân thứ Caputo của $x(t)$ được định nghĩa theo từng thành phần như sau:

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) := \left({}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_1(t), {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_2(t), \ldots, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x_d(t) \right)^T. $$

Định lý sau đây cho ta một điều kiện đủ cho sự tồn tại đạo hàm Caputo phân thứ cấp α.

Định lý 1.3. ([22]) *Cho* $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$. *Nếu* $f(t) \in AC^n[a, b]$, *khi đó đạo hàm phân thứ Caputo* ${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} f(t)$ *tồn tại hầu khắp nơi trên* $[a, b]$. *Hơn nữa, ta có*
(i) Nếu $\alpha \notin \mathbb{N}$ *thì* ${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t)$ *biểu diễn dưới dạng sau:*

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{f^{(n)}(s)ds}{(t - s)^{\alpha - n + 1}}.$$

Đặc biệt, khi $0 < \alpha < 1$ *và* $f(t) \in AC[a, b]$, *ta có:*

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{f'(s)ds}{(t - s)^{\alpha}}.$$

(ii) Nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *thì* ${}_{t_0}^{C}D_t^{n} f(t)$ *biểu diễn dưới dạng sau:*

$${}_{t_0}^{C}D_t^{n} f(t) = f^{(n)}(t).$$

Đặc biệt,

$${}_{t_0}^{C}D_t^{0} f(t) = f(t).$$

Mệnh đề sau khẳng định toán tử đạo hàm phân thứ Caputo là một toán tử tuyến tính.

Mệnh đề 1.3. ([21]) *Cho trước một số thực dương* α. *Khi đó đạo hàm phân thứ Caputo cấp* α *là một toán tử tuyến tính, tức là*

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \left[\lambda f(t) + \mu g(t)\right] = \lambda\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} f(t) + \mu\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} g(t),$$

trong đó $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f(t), g(t) \in AC^n[a, b]$.

Chứng minh. Tương tự như chứng minh Mệnh đề 1.2. □

Ta dễ dàng chứng minh được tính chất sau của đạo hàm phân thứ Caputo.

Mệnh đề 1.4. ([21]) *Cho trước một số thực dương* α. *Nếu* ξ *là hằng số thì* ${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \xi = 0$.

Giống với phép tính vi–tích phân cổ điển, đạo hàm phân thứ Caputo là nghịch đảo trái của toán tử tích phân phân thứ.

Định lý 1.4. ([22]) *Cho* $\alpha > 0$ *và* $f(t) \in C[a, b]$. *Khi đó ta có*

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \left({}_{t_0}I_t^{\alpha} f(t) \right) = f(t).$$